Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A X-A

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0,1)$ şi $x, y, z \in (0,\infty)$, astfel încât

$$a^x = bc,\ b^y = ca,\ c^z = ab.$$

Să se arate că

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq \frac{3}{4}.$$

Problema 2. Considerăm triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA), P \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{CN}{NA}$. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Problema 3. Spunem că o prismă este *binară* dacă există o etichetare a vârfurilor sale cu numere din mulţimea $\{-1, +1\}$, astfel încât produsul numerelor atribuite vârfurilor oricărei feţe (bază sau faţă laterală) este -1.

a) Să se arate că orice prismă *binară* are numărul vârfurilor divizibil cu 8.

b) Să se arate că orice prismă cu 2000 de vârfuri este *binară*.

Problema 4. a) Să se găsească două mulţimi X, Y astfel încât $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = \mathbb{Q}_+^*$ şi $Y = \{a \cdot b \mid a, b \in X\}$.

b) Să se găsească două mulţimi U, V astfel încât $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = \mathbb{R}$ şi $V = \{x + y \mid x, y \in U\}$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este punctat cu 7 puncte.